Colle du 14 novembre: Séries entières

8.1 Première série

Exercice 1: Quel est le rayon de convergence de $\sum e^{n \sin n} z^n$?

Exercice 2: Soit (a_n) la suite réelle définie par $a_0 = 1$ et $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k a_{n-k}$. Calculer a_n en fonction de n.

Exercice 3: Soit D le disque unité ouvert et f une série entière de rayon de convergence 1. Existe-t-il nécessairement un ouvert U connexe par arcs contenant strictement D tel que f admet un prolongement continu à U?

Exercice 4: Soient $a_1, .., a_m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble., et soit $p(n)$ le nombre de solutions $(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{N}^m$ de $a_1 x_1 + ... + a_m x_m = n$. Donner un équivalent de $p(n)$.

8.2 Deuxième série

Exercice 1: Soient D le disque unité ouvert et (a_n) une suite complexe. Supposons que $\sum n a_n$ converge absolument.
1. Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
2. Pour $z \in D$, on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et on suppose que $a_1 \neq 0$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leq |a_1|$. Montrer que f est injective.

Exercice 2: Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.

Exercice 3: Donner un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$, quand $x \to 1^-$.

Exercice 4: Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1 telle que $\forall z \in B(0,1), |f(z)|(1 - |z|) \leq 1$. Montrer que $|a_n| \leq (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)$.

8.3 Troisième série

Exercice 1: Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 2: Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1, continue et injective sur $\overline{B}(0,1)$. Calculer l'aire de $f(\overline{B}(0,1))$ en fonction des a_n.

Exercice 3: Montrer que $\forall n \geq 2, (n + 1/2)\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2p)\zeta(2n-2p)$.

Exercice 4: Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{D}$, développable en série entière sur D, et nulle sur un arc du cercle unité de longueur $\alpha > 0$. La fonction f est-elle nécessairement nulle?